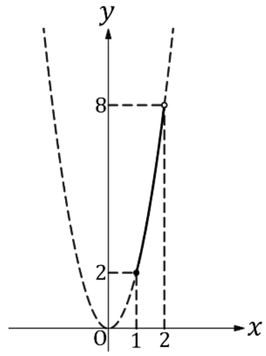
練習問題 1-A

1.

（１）$x=1$のとき，$y=2$

$x=2$のとき，$y=8$

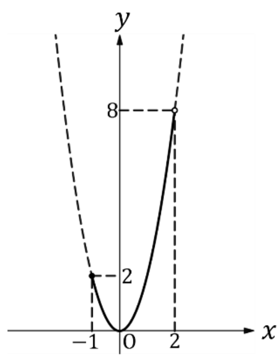


$\boldsymbol{2 \leqq y < 8}$

（２）$x=-1$のとき，$y=2$

$x=0$のとき，$y=0$

$x=2$のとき，$y=8$



$\boldsymbol{0 \leqq y < 8}$

2.

（１）頂点の座標が$(2,\ 4)$であるから，求める放物線の方程式は$y=a(x-2)^2+4$とおくことができる．

この放物線が，点$(0,\ 1)$を通るから

$1=a(0-2)^2+4$

$1=4a+4$

$4a=-3$

$a=-\dfrac{3}{4}$

したがって，求める放物線の方程式は

$\boldsymbol{y=-\dfrac{3}{4}(x-2)^2+4}$

（２）軸が$x=1$であるから，求める放物線の方程式は

$y=a(a-1)^2+b$とおくことができる

この放物線が，２点$(0,\ -1)$，$(3,\ -10)$を通るから

$$\begin{cases} -1=a(0-1)^2+b \\ -10=a(3-1)^2+b \end{cases}$$

整理すると

$$\begin{cases} a+b=-1 \\ 4a+b=-10 \end{cases}$$

これを解いて，$a=-3$，$b=2$

したがって，求める放物線の方程式は

$\boldsymbol{y=-3(x-1)^2+2}$

（３）求める放物線の方程式を$y=ax^2+bx+c$とおく．

この放物線が，３点$(0,\ 4)$，$(3,\ 1)$，$(4,\ -4)$を通るから，それぞれ代入して

$$\begin{cases} 4=c \\ 1=9a+3b+c \\ -4=16a+4b+c \end{cases}$$

これを解いて，$a=-1$，$b=2$，$c=4$

したがって，求める放物線の方程式は

$\boldsymbol{y=-x^2+2x+4}$

3.

（１）$y=x^2-2x$

$=(x-1)^2-1$

よって

最大値　なし

最小値　$\boldsymbol{-1}$（$\boldsymbol{x=1}$のとき）

（２）$y=2\left(x^2+\dfrac{3}{2}x\right)+2$

$=2\left\{\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{9}{16}\right\}+2$

$=2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{9}{8}+2$

$=2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}$

よって

最大値　なし

最小値　$\boldsymbol{\dfrac{7}{8}}$　$\left(\boldsymbol{x=-\dfrac{3}{4}}\text{のとき}\right)$

（３）$y=-\dfrac{1}{2}(x^2+10x)+1$

$= -\dfrac{1}{2}\{(x+5)^2 - 25\} + 1$

$= -\dfrac{1}{2}(x+5)^2 + \dfrac{25}{2} + 1$

$= -\dfrac{1}{2}(x+5)^2 + \dfrac{27}{2}$

よって

最大値　$\dfrac{27}{2}$（$x = -5$のとき）

最小値　なし

4.

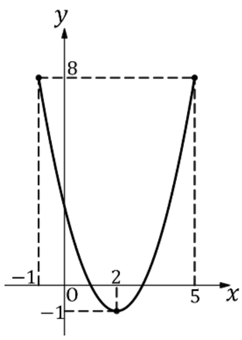
（１）$y = (x-2)^2 - 4 + 3$

$= (x-2)^2 - 1$

また

$x = -1$のとき，$y = 8$

$x = 5$のとき，$y = 8$



よって

最大値　8（$x = -1$，5のとき）

最小値　−1（$x = 2$のとき）

（２）$y = -3(x^2 + 2x) + 5$

$= -3\{(x+1)^2 - 1\} + 5$

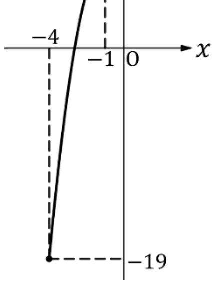
$= -3(x+1)^2 + 3 + 5$

$= -3(x+1)^2 + 8$

また

$x = -4$のとき，$y = -19$

$x = -1$のとき，$y = 8$



よって

最大値　8（$x = -1$のとき）

最小値　−19（$x = -4$のとき）

（３）$y = -(x^2 - 3x) - \dfrac{1}{4}$

$= -\left\{\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4}\right\} - \dfrac{1}{4}$

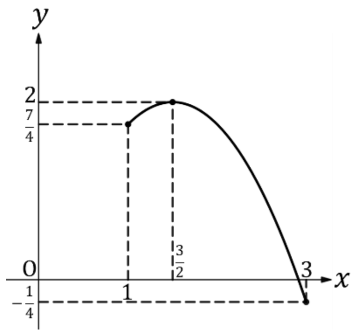
$= -\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{4} - \dfrac{1}{4}$

$= -\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + 2$

また

$x = 1$ のとき，$y = \dfrac{7}{4}$

$x = 3$ のとき，$y = -\dfrac{1}{4}$



よって

最大値　2　$\left(x = \dfrac{3}{2}\text{のとき}\right)$

最小値　$-\dfrac{1}{4}$（$x = 3$のとき）

5.

（１）$6x^2 - 13x + 6 = 0$の判別式をDとすると

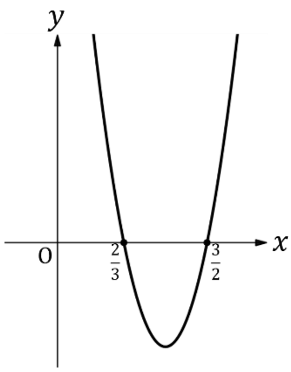
$D = (-13)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6$

$= 169 - 144 = 25 > 0$

$6x^2 - 13x + 6 = 0$を解くと

$(3x-2)(2x-3) = 0$

$x = \dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{2}$



$y = 6x^2 - 13x + 6$のグラフより

$6x^2 - 13x + 6 \leqq 0$の解は

$\dfrac{2}{3} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$

（２）$2x^2-x+3=0$の判別式をDとすると

$D=(-1)^2-4\cdot 2\cdot 3$

$\quad =1-24=-23<0$

よって，$y=2x^2-x+3$のグラフは，x軸と共有点をもたず，常に$y>0$である．

したがって，$2x^2-x+3<0$を満たすxは存在しないから，**解なし．**

6.

$y=x^2-3x-4$のグラフを，x軸の正の方向にp平行移動させたグラフの式は

$y=(x-p)^2-3(x-p)-4$

このグラフが原点を通るので

$0=(0-p)^2-3(0-p)-4$

これを解くと

$0=p^2+3p-4$

$(p-1)(p+4)=0$

$p=1,\ -4$

よって，x軸の正の方向に，**1または−4平行移動**すればよい．

7.

$\begin{cases} y=x^2-2x+2 \cdots ① \\ y=x^2+4x+3 \cdots ② \end{cases}$とする．

②のグラフを，x軸方向にp，y軸方向にq平行移動したグラフの式は

$y-q=(x-p)^2+4(x-p)+3$

$y=x^2-2px+p^2+4x-4p+3+q$

$\quad =x^2+(-2p+4)x+(p^2-4p+q+3)$

これが，①と一致するので

$\begin{cases} -2=-2p+4 \cdots ③ \\ 2=p^2-4p+q+3 \cdots ④ \end{cases}$

③より

$-2p=-6$

$p=3$

これを④に代入して

$2=3^2-4\cdot 3+q+3$

$2=9-12+q+3$

$q=2$

したがって

***x*軸方向に3，*y*軸方向に2平行移動したもの**である．

【別解】

$x^2-2x+2=(x-1)^2-1+2$

$\quad =(x-1)^2+1$

であるから，①のグラフの頂点は，$(1,\ 1)$

また

$x^2+4x+3=(x+2)^2-4+3$

$\quad =(x+2)^2-1$

であるから，②のグラフの頂点は，$(-2,\ -1)$

②のグラフをx軸方向にp，y軸方向にq平行移動したものが①に重なるとすると

$-2+p=1,\ -1+q=1$

よって，$p=3,\ q=2$

したがって

***x*軸方向に3，*y*軸方向に2平行移動したもの**である．

8.

$y=\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2-\dfrac{b^2}{4}+c$

よって，与えられた放物線の頂点は

$\left(-\dfrac{b}{2},\ -\dfrac{b^2}{4}+c\right)$

この頂点を，x軸方向に-2，y軸方向に5平行移動させた点が$(0,\ 2)$になるので

$\begin{cases} -\dfrac{b}{2}-2=0 \cdots ① \\ -\dfrac{b^2}{4}+c+5=2 \cdots ② \end{cases}$

①より

$-\dfrac{b}{2}=2$

$b=-4$

これを②に代入して

$-\dfrac{(-4)^2}{4}+c+5=2$

$-4+c+5=2$

$c=1$

よって，$\boldsymbol{b=-4,\ c=1}$

9.

与えられた２次方程式の判別式をDとすると

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot(k+5)$

$\quad =4-k-5$

$\quad =-1-k$

i) $D > 0$のとき

$-1 - k > 0$

$-k > 1$

すなわち，$k < -1$のとき，実数解の個数は２個

ii) $D = 0$のとき

$-1 - k = 0$

すなわち，$k = -1$のとき，実数解の個数は１個

iii) $D < 0$のとき

$-1 - k < 0$

$-1 < k$

すなわち，$k > -1$のとき，実数解の個数は０個

以上より

$$\begin{cases} \boldsymbol{k < -1}\textbf{のとき}\quad \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{k = -1}\textbf{のとき}\quad \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{k > -1}\textbf{のとき}\quad \textbf{0 個} \end{cases}$$

練習問題 1-B

1.

２式を上から①，②とする．

①より

$y = (x-2)^2 - 4 + a$

よって，①の頂点の座標は，$(2,\ a-4)$

②は放物線の方程式なので，$b \neq 0$であるから

$$y = b\left(x^2 - \frac{x}{b}\right) + 2$$

$$= b\left\{\left(x - \frac{1}{2b}\right)^2 - \frac{1}{4b^2}\right\} + 2$$

$$= b\left(x - \frac{1}{2b}\right)^2 - \frac{1}{4b} + 2$$

$$= b\left(x - \frac{1}{2b}\right)^2 + \frac{8b-1}{4b}$$

よって，②の頂点の座標は，$\left(\dfrac{1}{2b},\ \dfrac{8b-1}{4b}\right)$

２つの放物線の頂点が一致するので

$$\begin{cases} 2 = \dfrac{1}{2b} & \cdot\cdot\cdot ③ \\ a - 4 = \dfrac{8b-1}{4b} & \cdot\cdot\cdot ④ \end{cases}$$

③より

$4b = 1$

$b = \dfrac{1}{4}$

これを④に代入して

$$a = \frac{8 \cdot \frac{1}{4} - 1}{4 \cdot \frac{1}{4}} + 4$$

$$= \frac{2-1}{1} + 4$$

$$= 1 + 4$$

$$= 5$$

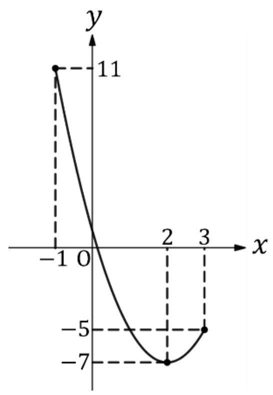
よって，$\boldsymbol{a = 5}$，$\boldsymbol{b = \dfrac{1}{4}}$

2.

$y = a(x^2 - 4x) + b$

$= a\{(x-2)^2 - 4\} + b$

$= a(x-2)^2 - 4a + b$



よって，$-1 \leqq x \leqq 3$において，図のように

$x = -1$で最大値，$x = 2$で最小値をとる．

$x = -1$のとき，$y = a(-1-2)^2 - 4a + b = 5a + b$

$x = 2$のとき，$y = a(2-2)^2 - 4a + b = -4a + b$

であるから

$$\begin{cases} 5a + b = 11 \\ -4a + b = -7 \end{cases}$$

これを解いて，$\boldsymbol{a = 2}$，$\boldsymbol{b = 1}$

3.

与えられた不等式は２次不等式であるから，$a \neq 0$

$y = ax^2 - 4x + a + 3$とおく．

i) $a < 0$のとき

この２次関数のグラフは上に凸の放物線となり，

すべてのxに対して$y > 0$となることはないから，

このときのaの値は存在しない．

ii) $a > 0$のとき

この２次関数のグラフは下に凸の放物線となり，

$ax^2-4x+a+3=0$の判別式をDとするとき，

すべてのxに対して$y>0$となるための条件は，

$D<0$となることであるから

$\frac{D}{4}=(-2)^2-a\cdot(a+3)$

$=4-a^2-3a$

$-a^2-3a+4<0$

$a^2+3a-4>0$

$(a-1)(a+4)>0$

$a<-4$，$a>1$

$a>0$であるから，$a>1$

以上より，定数aの範囲は，$\boldsymbol{a>1}$

4.

点Cの座標を$(t,\ 0)$とおくと，Dは放物線上の点なので，

$\mathrm{CD}=4-t^2$　ただし，$0<t<2$

また，$\mathrm{BC}=2t$であるから，長方形の周の長さをLとすると

$L=2(4-t^2)+2\cdot 2t$

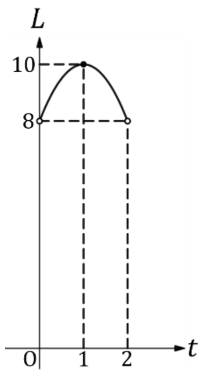
$=-2t^2+4t+8$

$=-2(t^2-2t)+8$

$=-2\{(t-1)^2-1\}+8$

$=-2(t-1)^2+2+8$

$=-2(t-1)^2+10$



よって，$t=1$のとき，

周の長さLは最大となり，

このとき，$\mathrm{CD}=4-t^2=\mathrm{AB}$より，$\boldsymbol{\mathrm{AB}=3}$

5.

$y=(x+m)^2-m^2-4m$

よって，最小値は$-m^2-4m$であるから

$\boldsymbol{s=-m^2-4m}$

$=-(m^2+4m)$

$=-\{(m+2)^2-4\}$

$=-(m+2)^2+4$

したがって，**$\boldsymbol{m=-2}$のとき，$\boldsymbol{s}$は最大となり，**

その最大値は4である．

6.

（１）$\mathrm{AP}>0$であるから，AP^2の値が最小となるとき，

APも最小となる．

三平方の定理より

$L=\mathrm{AP}^2=\left(0-\sqrt{y}\right)^2+(a-y)^2$

したがって，$\boldsymbol{L=y+(a-y)^2}$

（２）（１）を標準形にすると

$y+(a-y)^2=y+a^2-2ay+y^2$

$=y^2+(1-2a)y+a^2$

$=\left(y+\frac{1-2a}{2}\right)^2-\left(\frac{1-2a}{2}\right)^2+a^2$

$=\left(y+\frac{1-2a}{2}\right)^2-\frac{1-4a+4a^2}{4}+a^2$

$=\left(y+\frac{1-2a}{2}\right)^2+\frac{-1+4a-4a^2+4a^2}{4}$

$=\left(y+\frac{1-2a}{2}\right)^2+\frac{4a-1}{4}$

軸の位置によって，場合分けをする．

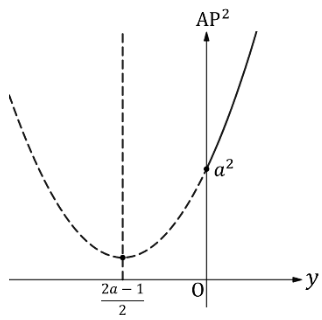
軸は，$y=-\frac{1-2a}{2}=\frac{2a-1}{2}$であることに注意する．

i）$\frac{2a-1}{2}\leqq 0$ のとき

$2a-1\leqq 0$

$2a\leqq 1$

$a\leqq\frac{1}{2}$



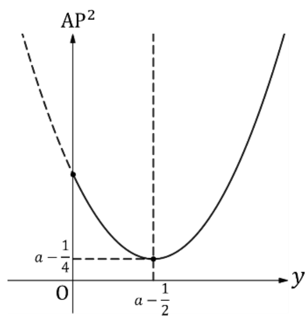
すなわち，$0\leqq a\leqq\frac{1}{2}$のとき

$y=0$において，AP^2は最小値a^2をとる．

ii）$\frac{2a-1}{2}>0$ のとき

$2a-1>0$

$2a>1$



すなわち，$a>\frac{1}{2}$のとき

$y=a-\frac{1}{2}$において，AP^2は最小値$a-\frac{1}{4}$をとる．

以上より

$$\begin{cases}\boldsymbol{0\leqq a\leqq\frac{1}{2}}\textbf{のとき}\quad \boldsymbol{y=0}\textbf{で最小値}\boldsymbol{a^2}\\ \boldsymbol{a>\frac{1}{2}}\textbf{のとき}\quad \boldsymbol{y=a-\frac{1}{2}}\textbf{で最小値}\boldsymbol{a-\frac{1}{4}}\end{cases}$$

7.

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

$$= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c$$

$$= \left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right\} + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

よって

標準形　$\boldsymbol{y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}}$

軸の方程式　$\boldsymbol{x = -\frac{b}{2a}}$

頂点の座標　$\boldsymbol{\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)}$